NOMS Prénoms des élèves du groupe :

-
-
-
-

Travail de groupe n° 7

1 heure

	Exercice 1	Exercice 2	Tenue du groupe	BONUS
Total	6	12	2	2

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

   Affirmation 1 : L'équation $g(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

2. On considère l'expression $2 + \dfrac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1}$

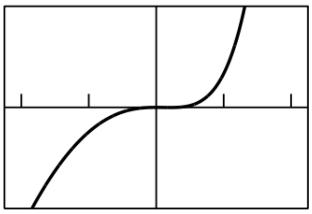
   Affirmation 2 : Pour tout réel x, cette expression est égale à $\dfrac{5 - 3e^x}{1 + e^x}$

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$$

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



1. À l'observation de cette courbe, quelle conjecture pensez-vous pouvoir faire concernant le sens de variation de f sur $[-3 ; 2]$?

   Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non cette conjecture.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x + 2)e^{x-1} - 1$$

3. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (x+3)\mathrm{e}^{x-1}$
   (b) Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.
   (c) En déduire le tableau de variations de g à compléter ci-dessous :

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
$g(x)$	

   (d) l'aide de la calculatrice, résoudre l'équation $g(x) = 0$ (on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près)
   On note α cette solution.
   (e) En déduire le signe de $g(x)$ et de $f'(x)$ suivant les valeurs de x (en complétant le tableau de signes ci-dessous) :

x	$-\infty$ $\cdots$ α $+\infty$
$\cdots$	
$g(x)$	
$f'(x)$	

4. Que pensez-vous de votre conjoncture ?

BONUS
Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a$$

Montrer que pour tout réel a, la fonction f_a possède un minimum.

Remarque : on utilisera le fait qu'il existe un unique nombre b tel que $e^b = 2$ et on exprimera la valeur où est atteint ce minimum en fonction de a et b.